

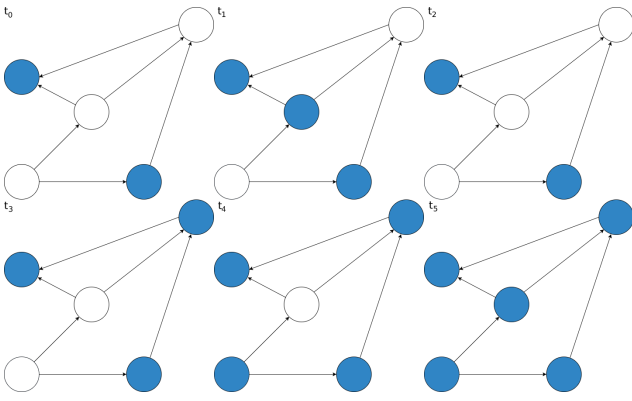
Voter Model

Beim Voter Model haben die Knoten des Graphen zwei Zustände oder Meinungen. Nach einiger Zeit hat ein Knoten die Möglichkeit mit einem seiner Nachbarn zu interagieren. Dabei wird ein Knoten von einem seiner Nachbarn von dessen Meinung überzeugt falls dieser anderer Meinung war, ansonsten passiert nichts.

Um diesen Sachverhalt zu beschreiben, wird ein Graph $G = (V, E)$ benötigt, wobei V die Knoten und E die Kanten des Graphen sind. Außerdem eine Funktion Z_t die den Zustand eines Knoten zur Zeit t beschreibt:

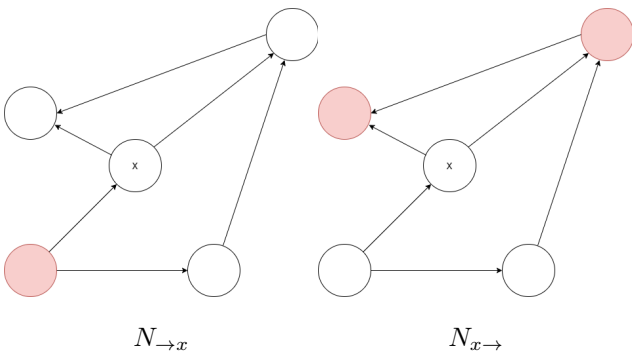
$$Z_t : V \rightarrow \{0, 1\}$$

wobei 0 und 1 die Zustände beziehungsweise Meinungen sind.



Zustände der Knoten zu Zeiten t_i

Für einen Knoten x sei $N_{x \rightarrow} = \{y : (x, y) \in V\}$ die Menge der Nachbarn, die von x erreicht werden und $N_{\rightarrow x} = \{y : (y, x) \in V\}$ die Menge der Nachbarn von denen aus x erreicht werden kann. Für einen ungerichteten Graphen sei $N_x := N_{\rightarrow x} = N_{x \rightarrow}$.



Die Änderungsrate von x ergibt sich aus dem Verhältnis von Nachbarn, deren Zustand x kopieren kann zu der totalen Anzahl der Nachbarn:

$$c_{0 \rightarrow 1}(x, Z_t) = \frac{1}{\#N_{x \rightarrow}} \sum_{y \in N_{x \rightarrow}} Z_t(y)$$

$$c_{1 \rightarrow 0}(x, Z_t) = \frac{1}{\#N_{x \rightarrow}} \sum_{y \in N_{x \rightarrow}} (1 - Z_t(y))$$

Für ungerichtete Graphen ist $N_{\rightarrow x} = N_{x \rightarrow} =: N_x$.

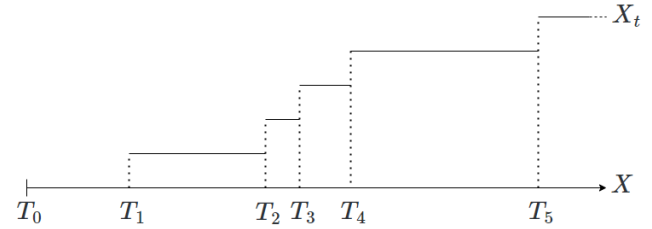
Poisson Prozesse

Sei $\mathcal{P}_\lambda$ die bekannte Poisson Verteilung, dann ist der Poisson Prozess $X : t \rightarrow X_t$ zur Zeit t , mit Intensität λ wie folgt definiert:

- (i) $\forall t > s \geq 0 : X_t - X_s \sim \mathcal{P}_{\lambda(t-s)}$
- (ii) $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots : (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_{i \geq 1}$ sind unabhängig

Für einen Poisson Prozess X mit Intensität λ , wird geschrieben $X \sim \mathcal{P}_\lambda$

Sei $X \sim \mathcal{P}_\lambda$, dann kann X_t als die Anzahl von Ereignissen auf dem Intervall $[0, t]$ interpretiert werden. Dabei ist das Eintreten eines Ereignisses unabhängig von allen Vorherigen, und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mindestens eines Ereignisses proportional zu der Länge des Intervalls.



Der Poisson Prozess X

Sei dann $T_n = \min\{t : X_t = n\}$ mit $T_0 = 0$ die kleinste Zeit nach der genau n Ereignisse aufgetreten sind. Es gilt für $\Delta T_n := T_n - T_{n-1} \sim \mathcal{E}_\lambda$.

Voter Model Zustandsänderungszeit

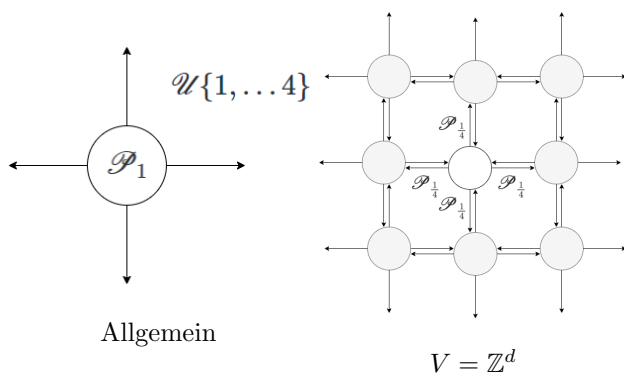
Die Zeitpunkte an denen sich die Zustände der Knoten ändern können, werden durch Poisson Prozesse bestimmt, dabei kann jedem Knoten x ein Poisson Prozess $X \sim \mathcal{P}_1$ zugewiesen werden, sodass die Zeiten zu denen x seinen Zustand an den seines Nachbarn anpasst definiert sind als $T_n = \min\{t : X_t = n\}$ und eine Gleichverteilung $\mathcal{U}\{1, \dots, \#N_{x \rightarrow}\}$, die den Nachbarn auswählt dessen Zustand x sich aneignet.

Für $V = \mathbb{Z}^d$ und $E = \{(k, l) : |k - l| = 1\}$ gilt für alle $y \in \mathbb{Z}^d$: $\#N_y = 2d$. Die Änderungsrate für einen Knoten x vereinfacht sich also zu:

$$c_{0 \rightarrow 1}(x, Z_t) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in N_x} Z_t(y)$$

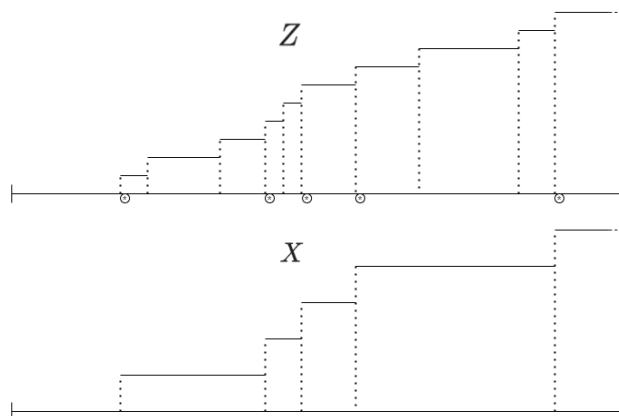
$$c_{1 \rightarrow 0}(x, Z_t) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in N_x} (1 - Z_t(y))$$

Für $x \in V$ können dann auch einfach $2d$ Poisson Prozesse $\mathcal{P}_{\frac{1}{2d}}$ an jeder Kante an x platziert werden. Die Zeiten an der eine Interaktion von x mit einem Nachbarn stattfindet, werden dann jeweils durch den Poisson Prozess an der Kante bestimmt.



Thinning

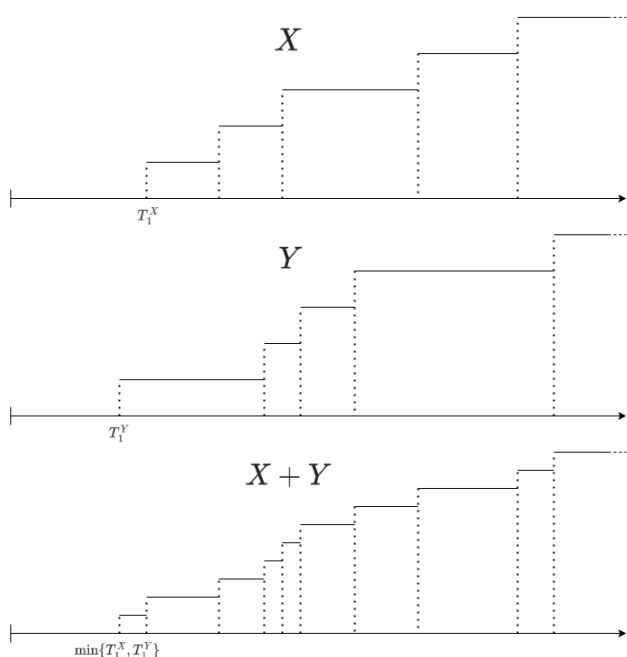
Betrachte die Anzahl der Ereignisse eines Poisson Prozesses $Z \sim \mathcal{P}_\lambda$, diese sollen mit Wahrscheinlichkeit 0.5 in Typ 0 und Typ 1 aufgeteilt werden, dann sind nur die Anzahl der Ereignisse von Typ 0 ein Poisson Prozess mit Intensität $\frac{\lambda}{2}$.



Poisson Prozess Z , und ausgedünnter Prozess X

Superposition

Seien $X, Y \sim \mathcal{P}_\lambda$ unabhängig, dann ist $X + Y \sim \mathcal{P}_{2\lambda}$ und die Wahrscheinlichkeit des Auftretens genau eines Ereignisses in $[s, t]$ für X , vorausgesetzt es gibt ein Ereignis in X oder Y , ist $\frac{1}{2}$.



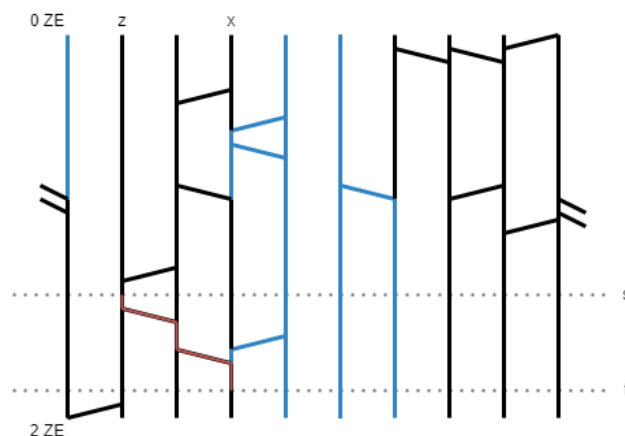
Poisson Prozesse X , Y und $X + Y$

Dualität

Definition Pfad

Seien $(z, s), (x, t) \in V \times \mathbb{R}_0^+$, dann existiert ein Pfad $(z, s) \rightarrow (x, t)$, wenn $s = s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1} = t \in \mathbb{R}_0^+$ und $z = x_0, x_1, \dots, x_n = x \in V$ existieren, sodass:

1. $\forall i = 1..n$: existiert eine Zustandsänderung $x_{i-1} \rightarrow x_i$ zur Zeit s_i
2. $\forall i = 0..n$: existiert keine Zustandsänderung von x_i im Zeitintervall (s_i, s_{i+1})



Pfad $(z, s) \rightarrow (x, t)$

Definition dual Pfad

Seien $(z, s), (x, t) \in V \times \mathbb{R}_0^+$, dann existiert ein dual Pfad $(x, t) \rightarrow (z, s)$, wenn ein Pfad $(z, s) \rightarrow (x, t)$ existiert.

Ausgehend von einer beschränkten Menge $A \subset V$ und einer Zeit $t \in \mathbb{R}_0^+$, kann man diesen Graph rückwärts

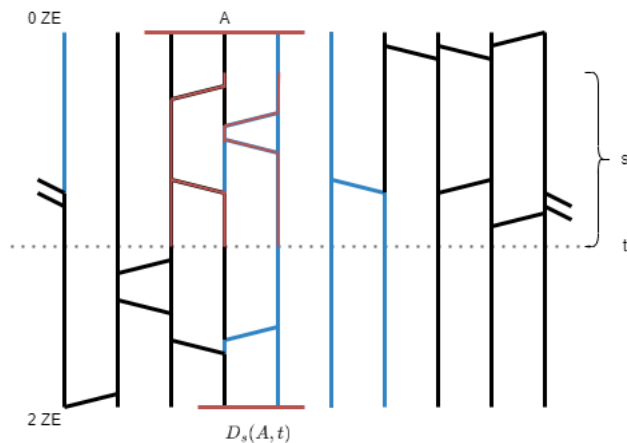
in der Zeit und über die dual Pfade ablaufen. Die Elemente aus V die man nach einer Zeit $s \in \mathbb{R}_0^+$ erhält wenn man alle Möglichkeiten zurück läuft sind der dual Prozess $D_s(A, t)$.

Definition dual Prozess

Sei $0 \leq s \leq t$

$$D_s(A, t) = \{z : \text{ex. dual Pfad } (x, t) \rightarrow (z, t-s) \text{ für } x \in A\}$$

Für $x \in V$ sei $D_s(x, t)$ so definiert, dass $D_s(\{x\}, t) = \{D_s(x, t)\}$



dual Prozess auf A zur Zeit t , s Zeiteinheiten zurück

Für $x \in V$ gilt dann: $Z_t(x) = Z_{t-s}(D_s(x, t))$ Wenn man die Zeit t als Gegenwart sieht bedeutet das, dass der Knoten $D_s(x, t)$ von dem x vor s Zeiteinheiten seinen Zustand bekommen hat, vor s Zeiteinheiten denselben Zustand wie x jetzt hat.

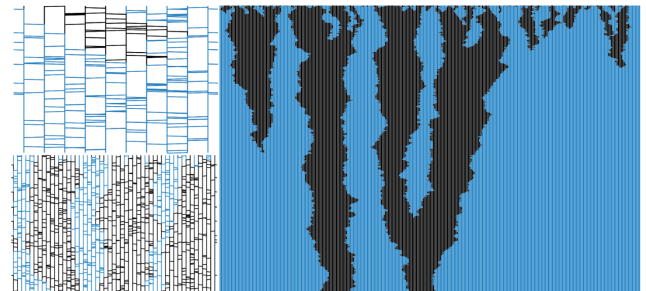
Man sieht außerdem, dass zwei dual Prozesse sich vereinen wenn es einen gemeinsamen Ursprung vor

höchstens s Zeiteinheiten gegeben hat. Damit können die dual Prozesse als System von **Coalescing Random Walks** betrachtet werden.

Einstimmigkeit von endlichen, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen

Sei G ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph, dann ist eine Eigenschaft des Voter Models, dass alle Knoten den selben Zustand haben sofern genug Zeit vergangen ist:

$$\forall x, y \in G : \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_t(x) \neq Z_t(y)] = 0$$



Realisierungen des Voter Models auf einem 1d Torus

Ausblick Koexistenz

Wenn für V wieder $\mathbb{Z}^d$ betrachtet wird, kann ein analoger Beweis für die schließliche Einstimmigkeit des Graphen auch für $d \in \{1, 2\}$ gefunden werden, allerdings gilt das Gegenteil für $d \geq 3$. Es kann bewiesen werden, dass zu jeder Zeit noch beide Zustände repräsentiert sind, auch dieser Beweis nutzt die Dualität des Voter Models zu den Random Walks.